SEMANTISCHE REPRÄSENTATION STRUKTURIERTER OBJEKTE IM HILBERTRAUM UND DEREN VERARBEITUNG NACH QUANTENMECHANISCHEN FORMALISMEN

Ingo Schmitt, Ronald Römer, Günther Wirsching und Matthias Wolff

Brandenburgische Technische Universität
ingo.schmitt@b-tu.de

Kurzfassung: Kognitive Agenten müssen selbständig Strukturen ihrer Umgebung aufdecken und für die Verhaltenssteuerung nutzbar machen können. Um dieses Problem zu lösen, manipuliert der Agent die Umgebungsobjekte, nimmt die Konsequenzen dieser Operationen wahr und bildet diese Vorgänge in einem Modell der externen Realität (innere Bühne) nach. Solch ein zyklisches Verhalten findet man sowohl beim Information-Retrieval mit Relevanz-Feedback als auch bei psychologischen Experimenten zur Konditionierung wieder. Als problematisch erweist sich dabei jedoch der Umgang mit unbestimmten Objekten und unbestimmten Konsequenzen. Diese Problemstellung muss insbesondere bei der Repräsentation von semantischen Objekten und den Operationen auf diesen Objekten berücksichtigt werden. Der in dieser Arbeit vorgestellte Lösungsansatz verbindet Ansätze aus der Objekttyptheorie und dem mathematischen Formalismus der Quantenmechanik und zeigt die Modellierung der inneren Bühne an einem Beispiel.

1 Motivation

In [10] haben wir zur Modellierung der Gedankenverarbeitung von Maschinen einen quantenmechanischen Formalismus vorgestellt, mit dem wir derartige Gedanken im Hilbertraum repräsentieren und verarbeiten können. Dieser geometrische Ansatz entstammt ursprünglich aus dem Information Retrieval (IR), wobei dort der Vergleich von Anfragen in Bezug auf die Dokumente einer Datenbank im Mittelpunkt der Betrachtungen steht. Der Mehrwert des Formalismus zeigt sich darin, dass komplexere Anfragen durch logische Verknüpfungen gebildet werden können, ohne die Repräsentationsform ändern zu müssen.

Wir haben diesen Ansatz zunächst in einer einfachen Form auf das Mouse-Maze Problem übertragen und gezeigt, dass wir mit dem Formalismus nicht nur Ähnlichkeitsprüfungen sondern auch dynamische Vorgänge des Perzeptions-Aktionszyklus modellieren können. Die Beschreibung dynamischer Vorgänge ist u.a. notwendig, um unüberwachte Lernverfahren wie das Reinforcement Learning (RL) anwenden zu können [12].

Lernverfahren, welche in einen Perzeptions-Aktionszyklus eingebettet sind, findet man man bei kognitiven Agenten, dem Relevanz-Feedback des IR sowie bei psychologischen Experimenten zur Konditionierung. Eine naheliegende Fragestellung ist nun, ob das technisch realisierte RL zu den gleichen Ergebnissen führt, wie man sie bei psychologischen Experimenten vorfindet. In [3] wurde für einfache Klassifikations-Entscheidungsexperimente gezeigt, dass der dem RL zugrundeliegende Markov-Entscheidungsprozess (MDP) menschliches Verhalten nur bedingt nachbilden kann. Eine höhere Erklärungskraft der menschlichen Leistungen bieten dagegen

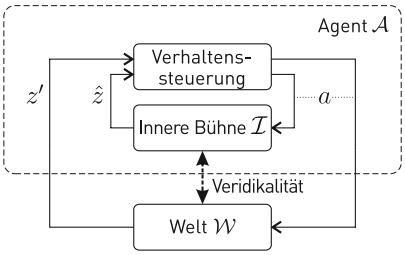

Bild 1: Agent-Welt-Modell.

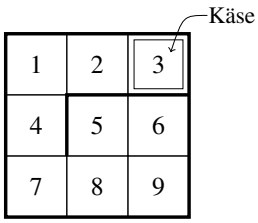

Bild 2: Beispielwelt: Einfaches Labyrinth in dem sich der kognitive Agent (Maus) bewegt. Fette Linien kennzeichnen nicht passierbare Wände, Käse befindet sich im Feld 3.

quantenmechanische Modelle, welche die Superposition von Klassifikation und Entscheidung zulassen, bei denen dann aber das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit nicht mehr erfüllt ist.

In dieser Arbeit werden wir nach Einführung des Agent-Welt-Modells und einigen vereinfachenden Annahmen die Problemstellung formulieren, welche unter Verwendung einer inneren Bühne (vgl. [2]) gelöst werden soll. Anschließend werden die formalen Grundlagen der Quantenmechanik zusammengestellt und schließlich auf die Repräsentation und Verarbeitung der Datenstrukturen der inneren Bühne angewendet. Mit einer Zusammenfassung der Modellierungsergebnisse und dem Ausblick auf zukünftige Arbeiten beschließen wir den Beitrag.

2 Agent-Welt-Modell

Formal gehen wir vom im Bild 1 dargestellten Perzeption-Aktions-Zyklus zwischen dem kognitiven Agenten $\mathcal{A}$ und seiner Umwelt $\mathcal{W}$ aus. Für die folgende Ausarbeitung legen wir vereinfachend fest: Die Welt sei durch ein Zustandsmodell beschreibbar und ihr Zustandsalphabet Z sei dem Agenten bekannt. Die Welt sei zeitinvariant und deterministisch, das heißt, sie befinde sich zu jedem Zeitpunkt in genau einem Zustand $z \in Z$ und ihre Reaktionen auf Aktionen des Agenten sei nur vom aktuellen Zustand, jedoch nicht vom Zeitpunkt oder vom Zufall, abhängig. Der Agent soll Aktionen $a \in A$ aus einem ihm bekannten Aktionsalphabet direkt und in symbolischer Form in die Welt eingeben können.[1] Die Welt reagiere auf Handlungen des Agenten mit einem Zustandswechsel $z \to z'$ ($z, z' \in Z$), wobei $z' = z$ (keine Reaktion) möglich ist. Der Agent soll den aktuellen Weltzustand, insbesondere den aus einer Aktion resultieren Zustand z', jederzeit direkt in symbolischer Form lesen können (totale Beobachtbarkeit). Die innere Bühne sei deterministisch.

Zur Veranschaulichung nutzen wir wie in [10, 13, 14] Shannons Maus-Labyrinth-Beispiel. Die Maus ist dabei der kognitive Agent mit dem Handlungsrepertoire $A = \{\mathsf{N}, \mathsf{O}, \mathsf{S}, \mathsf{W}\}$ (Bewegung in eine Haupthimmelsrichtung), das in Bild 2 dargestellte Labyrinth die Welt mit den Zuständen $Z = \{1, \ldots, 9\}$ (Felder). Der aktuelle Zustand $\mathtt{ZID} \in Z$ der Welt bezeichnet das Feld, in dem die Maus sich momentan befindet. Jedem Zustand ist eindeutig eine Eigenschaft $\mathtt{Käse} : Z \to \{0, 1\}$ (im Feld befindet sich Käse) zugeordnet. Aktionen der Maus ändern den Zustand, beispielsweise $\mathtt{vonZID} = 1 \xrightarrow{\mathsf{O}} \mathtt{nachZID} = 2$.

[1] Die Interaktion mit realen Welten findet über Sensor- und Aktuator*signale* statt, zu deren Verarbeitung ein realistischer kognitiver Agent über Perzeptor- und Aktuatorhierarchien zur Signal- und Informationsverarbeitung verfügen muss; vgl. [14].

3 Problemstellung

Finale Systeme profitieren in hohem Maße davon, wenn sie ein Modell der externen Realität enwickeln, mit dem sie Probehandlungen ausführen können und sie in der Lage sind, die Konsequenzen der eigenen Handlungen in der Realität vorherzusagen (vgl. [2]). Um die damit verbundene Problemstellung formal darzustellen, folgen wir zunächst einem Gedankenexperiment nach M. Huckvale und stellen dabei zwei Kernprobleme heraus, für die es je eine Lösung auf der symbolischen Ebene gibt. Anschließend erweitern wir den symbolischen Ansatz durch die Verwendung von Symbolen mit einer inneren Struktur (Objekte) und motivieren damit den Übergang zur semantischen Ebene.

Gedankenexperiment. Wir gehen hier der Frage nach, wie ein neugeborener Organismus ohne Wissen über die Welt außerhalb seines Körpers überleben kann. Hierzu denken wir uns einen Homunkulus im Kontrollzentrum einer Maschine, in der sich Schalter $\tilde{a} \in \tilde{A}$ und Kontrollleuchten $\tilde{o} \in \tilde{O}$ befinden. Unser Homunkulus kann nur überleben, wenn er diese Maschine zielgerichtet manipulieren kann, so dass die existenziellen Bedürfnisse nach Nahrung, Wärme oder Atemluft etc. befriedigt werden können. Zu diesem Zweck kann er die Schalter betätigen, die Kontrollleuchten beobachten und muss lernen, diese richtig zueinander in Beziehung zu setzen.

Eine wichtige Voraussetzung für die Lösung dieser Problemstellung besteht darin, dass die Maschine mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung tritt. Dafür muss die Maschine über Aktuatoren $a \in A$ und Sensoren $o \in O$ verfügen, welche mit den Schaltern $\tilde{a} \in \tilde{A}$ bzw. den Kontrollleuchten $\tilde{o} \in \tilde{O}$ des Kontrollzentrums verbunden sind. Zur Lösung des Problems müssen zum einen die jeweiligen Mengen A und $\tilde{A}$ sowie O und $\tilde{O}$ zueinander in Beziehung gesetzt werden:

$$R_A \subseteq \tilde{A} \times A \text{ bzw. } R_O \subseteq O \times \tilde{O}. \tag{1}$$

Zum anderen ist es erforderlich, dass der Homunkulus seine Umgebung zielgerichtet manipulieren kann. Die damit angesprochenen Wirkungsbeziehungen betreffen nun die Zustände der Welt bzw. des Agenten und dabei unterscheiden wir die folgenden zwei Aspekte.

Ursache-Wirkungs-Beziehungen. Der Agent wählt im aktuellen inneren Zustand $\tilde{s}$ einen bestimmten Schalter $\tilde{a}$, beobachtet die Kontrollleuchten $\tilde{o} \in \tilde{O}$ und registriert einen Folgezustand $\tilde{s}' \in \tilde{S}$. Diese grundlegende Verhaltensweise stellt den Kern eines Explorationsprozeßes dar, mit dem der Agent die Verhaltensrelation $R_V \subseteq \tilde{S} \times \tilde{O} \times \tilde{S} \times \tilde{A}$ bilden kann. Anstelle der Mengendarstellung können wir auch mit der Abbildung $L_V : \tilde{S} \times \tilde{O} \times \tilde{S} \times \tilde{A} \to \{0,1\}$ arbeiten. Wir verwenden sie, um die beobachteten Zustandsübergänge durch diejenigen Quadrupel $(\tilde{s}', \tilde{o}, \tilde{s}, \tilde{a})$ zu repräsentieren, für welche die Beziehung

$$R_V := \{(\tilde{s}', \tilde{o}, \tilde{s}, \tilde{a}) |\, L_V(\tilde{s}', \tilde{o}, \tilde{s}, \tilde{a}) = 1\} \tag{2}$$

erfüllt ist. Mit den im zweiten Abschnitt gemachten Annahmen über das Zustandsalphabet Z gilt für die Beobachtungen und Aktionen $\tilde{o} = o = z' \in Z$ bzw. $\tilde{a} = a \in A$ sowie $\tilde{s}' = \hat{z} \in Z$ für die Vorhersagen der inneren Bühne. Damit erhält man schließlich das vereinfachte Blockschaltbild eines kognitiven Agenten (Bild 1). Die Verhaltensrelation nimmt nun die Form $R_V \subseteq Z \times A \times Z$ an. Sie stellt ein dynamisches Modell dar, welches dem Agenten Vorhersagen erlaubt.

Innere Struktur von Zuständen. Wir können die Verhaltenssteuerung flexibler gestalten, wenn wir nicht mehr mit atomaren Symbolen arbeiten, sondern mit Symbolen, die eine innere Struktur besitzen. In diesem Fall liegen Objekte vor, deren Struktur durch die Umgebung bestimmt wird (siehe Beispiel in Abschnitt 2). Wir gehen zunächst wieder von der symbolischen Darstellung aus und beschreiben die Struktur des inneren Zustands mit den Trägermengen Z und C (Käse) sowie der zugehörigen Relation $R_S \subseteq Z \times C$. Ähnlich wie bei der Verhaltensrelation werden

die Elemente dieser Teilmenge im deterministischen Modell durch die Abbildung $L_S : Z \times C \rightarrow \{0,1\}$ bestimmt:

$$R_S := \{(z,c) | L_S(z,c) = 1\}. \tag{3}$$

Diese Struktur kann weiter verfeinert werden, wenn in Folge des Lernprozesses erkannt wird, dass jeder Zustand $z \in Z$ durch die messbaren Koordinaten (x,y) bestimmt werden kann. Wir erhalten dann die Relation $R_S := \{(x,y,c) | L_S(x,y,c) = 1\}$, welche eine etwas komplexere Struktur aufweist.

4 Grundlagen der Quantenmechanik

Dieser Abschnitt führt kurz in den Formalismus der Quantenmechanik [9] und seine Beziehung zur Probabilistik ein. Nach Einführung einiger Notationen werden die grundlegenden vier Postulate der Quantenmechanik vorgestellt. Wir gehen hier davon aus, dass der Leser mit der linearen Algebra vertraut ist.

In der Quantenmechanik kommen Vektoren des komplexen, separablen Hilbertraums **H** zum Einsatz. Ohne Verlust der Allgemeinheit in unserem Kontext und für ein besseres Verständnis beschränken wir uns im Folgenden auf den reellwertigen, endlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Die Dirac-Notation [6] liefert eine elegante Möglichkeit zur Formulierung von quantenmechanischen Konzepten. Ein sogenannter *Ket*-Vektor $|x\rangle$ repräsentiert einen Spaltenvektor, welcher durch `x` identifiziert wird. Ein Transponieren eines Kets $|x\rangle$ liefert einen Zeilenvektor $\langle x|$, welcher im Folgenden *Bra*-Vektor genannt wird. Dessen Transponierung liefert wieder den ursprünglichen Ket-Vektor. Das *innere Produkt* zwischen zwei Ket-Vektoren $|x\rangle$ und $|y\rangle$ entspricht dem Skalarprodukt (Bracket) $\langle x|y\rangle$ (daher auch die Namen *Bra* und *Ket*). Die *Norm* eines Ket-Vektors ist definiert als $||\,|x\rangle\,|| \equiv \sqrt{\langle x|x\rangle}$. Das äußere Produkt zwischen den Ket-Vektoren $|x\rangle$ und $|y\rangle$ entspricht dem Produkt $|x\rangle\langle y|$. Es generiert einen linearen Operator, welcher als Matrix dargestellt wird. Das *Tensorprodukt* $|x\rangle \otimes |y\rangle$ oder abgekürzt $|xy\rangle$ ist zwischen zwei Ket-Vektoren $|x\rangle$ und $|y\rangle$ definiert. Wenn $|x\rangle$ `m`-dimensional und $|y\rangle$ `n`-dimensional sind, dann ist $|xy\rangle$ ein `m·n`-dimensionaler Ket-Vektor. Das Tensorprodukt zweier zweidimensionaler Ket-Vektoren $|x\rangle$ und $|y\rangle$ ist definiert durch:

$$|xy\rangle \equiv |x\rangle \otimes |y\rangle \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Das Tensorprodukt zwischen Matrizen ist analog definiert. Im Folgenden werden die vier Postulate der Quantenmechanik skizziert.

Postulat 1: Jedes geschlossene, physikalische, mikroskopische System korrespondiert zu einem komplexen Hilbertraum[2] und jeder Systemzustand wird vollständig durch einen normalisierten (Norm beträgt eins) Ket-Vektor dieses Raums beschrieben. *Postulat 2:* Jede Änderung des Zustands $|\varphi\rangle$ kann als Produkt eines unitären Operators O und einem Ket-Vektor $|\varphi\rangle$ beschrieben werden. Der neue Zustand ist definiert durch $|\varphi'\rangle = O|\varphi\rangle$. *Postulat 3:* Dieses Postulat beschreibt die Messung eines Zustands. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit verschiedener Messergebnisse berechnet. Wenn ein bestimmtes Ergebnis gemessen wurde, dann ist das System danach genau in diesem Ergebniszustand. Wir betrachten hier vereinfacht die Messung durch Projektoren. Ein *Projektor* $p = \sum_i |i\rangle\langle i|$ ist ein symmetrischer ($p^t = p$) und idempotenter ($pp = p$) Operator, der

[2] Wir gehen hier von $\mathbb{R}^n$ aus.

über einer Menge orthonormaler Ket-Vektoren $|i\rangle$ definiert ist. Die Multiplikation mit einem Zustandsvektor bedeutet die Projektion auf einen Vektorunterraum. Die Wahrscheinlichkeit eines Messergebnisses entsprechend des Projektors p und eines gegebenen Zustands $|\varphi\rangle$ ist definiert durch $\langle\varphi|p|\varphi\rangle = \langle\varphi|\left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)|\varphi\rangle = \sum_i \langle\varphi|i\rangle\langle i|\varphi\rangle$. *Postulat 4:* Dieses Postulat definiert, wie verschiedene geschlossene (also unabhängige) Quantensysteme zu einem Quantensystem komponiert werden können. Die Basisvektoren des zusammengesetzten Systems ergeben sich durch Anwendung des Tensorprodukts auf den Basisvektoren der Teilsysteme.

Die Quantenmechanik liefert ein elegantes Rahmenwerk, welches Konzepte der Geometrie, der Probabilistik und der Logik (wird hier nicht betrachtet) vereinheitlicht. Die Grundidee der Verwendung der Quantenmechanik liegt in der Informationskodierung als Zustandsvektoren von Systemen. Leseoperationen erfolgen mittels Projektoren und Zustandsänderung mittels Orthonomaloperatoren.

5 Modellierung des Agenten

In diesem Abschnitt werden die Informationen des Agenten modelliert. Dabei kommen vier verschiedene Repräsentationen von Datenstrukturen zum Einsatz: (1) das Entity-Relationship-Modell [4, 7], (2) das relationale Datenbankmodell [5, 8, 7], (3) ein vereinfachtes Objekttypsystem objektrelationaler Datenbanken [1] sowie (4) die Quantenmechanik [11, 9].

Die Abbildung 3 zeigt die Modellierung der inneren Bühne mittels eines ER-Diagramms. In der

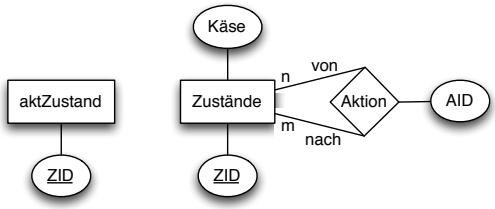

Bild 3: ER-Diagramm der inneren Bühne

Entitätenmenge `Zustände` wird `ZID` als Schlüssel markiert. Dies bedeutet, dass es pro Zustand nur einen Käsewert geben kann. Insgesamt bildet dieser Entwurf einen beliebigen Graph ab und deckt damit auch das Mauslabyrinthbeispiel ab.

Folgende Parameter sind für die Modellierung des Mauslabyrinthbeispiels zu initialisieren: `#Zustände = 9` - Anzahl der unterstützten Zustände (Felder 1 bis 9 $\in Z$), `#Aktionen = 2` - Anzahl der unterstützten Aktionen (Aktionen für $\mathsf{O}, \mathsf{N} \in A$) und `#Käsewerte = 2` - Anzahl der unterstützten Käsewerte (Käse nicht vorhanden (0) und vorhanden (1)).

Auffallend ist, dass die Aktionen für W und S in der Modellierung der inneren Bühne fehlen. Sie sind jedoch real als ausführbare Aktionen vorhanden. Sie werden zur Vermeidung von Redundanz nur invertiert in der Bühne abgelegt.

Das ER-Diagramm aus Abbildung 3 kann in Relationenschemata abgebildet werden. Die unterstrichenen Attribute markieren eindeutige Schlüssel:
`aktZustand(ZID)` mit $dom(\texttt{ZID}) = \{1, \ldots, \texttt{\#Zustände}\} = Z$
`Zustände(ZID,Käse)` mit $dom(\texttt{Käse}) = \{0, \ldots, \texttt{\#Käsewerte} - 1\}$ (entspricht R_S)
`Aktion(vonZID,AID,nachZID)` mit $dom(\texttt{AID}) = \{1, \ldots, \texttt{\#Aktionen}\} = A$ (R_V). Die

Schlüssel drücken aus, dass pro Zustand nur ein Käsewert und dass für jede Kombination `(vonZID,AID)` maximal ein `nachZID`-Wert erlaubt ist.

Initial gehen wir davon aus, dass dem Agenten der Initialzustand und dessen Käsewert bekannt ist. Diese Information wird in den Relationen `aktZustand` und `Zustände` als Tupel abgelegt. Die Relation `Aktion` ist hingegen leer. Beim Lernen wird ausgehend von einem aktuellen Zustand eine Aktion ausgeführt. Anhand der Beobachtung lässt sich der Folgezustand und der entsprechende Käsewert feststellen. Im Fall eines Zustandswechsel wird der neue aktuelle Zustand in der Relation `aktZustand`, der Käsewert in der Relation `Zustände` und der erfolgreiche Zustandswechsel in der Relation `Aktion` gespeichert. Eine an einer Mauer oder einem Rand gescheiterte Aktion bedeutet keinen Zustandswechsel.

Die folgenden Relationen zeigen den Inhalt der inneren Bühne, wenn durch Aktionen und Beobachtungen das Mauslabyrinth vollständig durchsucht wurde und der aktuelle Zustand auf 2 gesetzt ist. Unvollständigkeit würde Teilmengen der Relationen erzeugen.

`aktZustand`

ZID
2

`Zustände`

ZID	Käse
1	0
2	0
3	1
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0

`Aktion`

vonZID	AID	nachZID
1	O	2
2	O	3
4	N	1
5	O	6
7	O	8
7	N	4
8	O	9
8	N	5
9	N	6

Man kann folgende Ergebniszustände für Aktionen ausgehend vom aktuellen Zustand 2 an Hand der Relation `Aktion` vorhersagen. Die Vorhersagen lassen sich durch Anfragen entsprechend des relationalen Bereichskalküls [8, 7] ausdrücken. Jede Anfrage liefert eine Relation zurück. Eine leere Relation wird hier als ein `false` interpretiert: nach O liefert 3 wegen des Tupels $(2,\mathsf{O},3)$ mittels der Anfrage: $\{(2,\mathsf{O},3)|\texttt{Aktion}(2,\mathsf{O},3)\}$; nach W liefert 1 wegen des Tupels $(1,\mathsf{O},2)$ mittels der Anfrage: $\{(1,\mathsf{O},2)|\texttt{Aktion}(1,\mathsf{O},2)\}$; nach N liefert `nicht definiert` wegen fehlendem Tupel $(2,\mathsf{N},_)$ mittels der Anfrage: $\{(2,\mathsf{N},NZ)|\texttt{Aktion}(2,\mathsf{N},NZ^3)\} = \emptyset$ und nach S liefert `nicht definiert` wegen fehlendem Tupel $(_,\mathsf{N},2)$ mittels der Anfrage: $\{(VZ,\mathsf{N},2)|\texttt{Aktion}(VZ,\mathsf{N},2)\} = \emptyset$.

Bevor die Modellierung in den Hilbertraum entsprechend der Quantenmechanik überführt wird, wird der relationale Datenentwurf mittels elementarer Datentypen und den Typkonstruktoren `tuple` und `set` dargestellt. Ein *Typ* wird wie folgt rekursiv definiert: Jeder elementare Datentyp `el` ist ein *Typ* mit dem Wertbereich $dom(\texttt{el})$. Die Tuple-Typkonstruktion $\texttt{tuple(id}_1\texttt{:t}_1\texttt{,}\ldots\texttt{,id}_n\texttt{:t}_n\texttt{)}$ für $n \in \{1,2,\ldots\}$, den Bezeichnern $\texttt{id}_i$ und den *Typen* $\texttt{t}_i$ ist ein *Typ* mit dem Wertebereich $dom(\texttt{tuple(id}_1\texttt{:t}_1\texttt{,}\ldots\texttt{,id}_n\texttt{:t}_n\texttt{)}) = dom(\texttt{t}_1) \times \ldots \times dom(\texttt{t}_n)$. Die Set-Typkonstruktion `set(t)` auf der Basis des *Typs* `t` ist ein *Typ* mit dem Wertebereich $dom(\texttt{set(t)}) = 2^{dom(\texttt{t})}$.

Im Folgenden wird der relationale Datenbankentwurf des Mauslabyrinthbeispiels als Typ dargestellt: Elementare Typen sind $\texttt{t}_{ZID}\texttt{,}\ \texttt{t}_{Käse}\texttt{,}\ \texttt{t}_{AID}$ mit den Wertebereichen $dom(\texttt{t}_{ZID})$, $dom(\texttt{t}_{Käse})$ und $dom(\texttt{t}_{AID})$. Weitere Typen sind $\texttt{t}_{Zustände}\texttt{=set(tuple(ZID:t}_{ZID}\texttt{, Käse:t}_{Käse}\texttt{))}$ - eine Relation lässt sich also durch die Typkonstruktion `set(tuple(...))` ausdrücken,

[3] *NZ* ist eine Variable für den Zielzustand.

$\mathtt{t}_{Aktion}$=`set(tuple(vonZID:`$\mathtt{t}_{ZID}$`,AID:`$\mathtt{t}_{AID}$`,nachZID:`$\mathtt{t}_{ZID}$`))` und
$\mathtt{t}_{innereBühne}$=`tuple(aktZustand:`$\mathtt{t}_{ZID}$`,Zustände:`$\mathtt{t}_{Zustände}$`,Aktion:`$\mathtt{t}_{Aktion}$`)`.

Folgende Bedingungen erzwingen die Eindeutigkeitsbedingungen (Schlüssel) für eine innere Bühne `I` vom Typ $\mathtt{t}_{innereBühne}$.

$$\forall z_1, z_2 \in \mathtt{I.Zustände}: z_1.\mathtt{ZID} = z_2.\mathtt{ZID} \implies z_1 = z_2$$
$$\forall a_1, a_2 \in \mathtt{I.Aktion}: a_1.\mathtt{vonZID} = a_2.\mathtt{vonZID} \wedge a_1.\mathtt{AID} = a_2.\mathtt{AID} \implies a_1 = a_2$$

Entsprechend der Modellierung der inneren Bühne als Typ wird der Wertebereich eines Typs als Hilbertraum mittels Angabe der Orthonormalbasisvektoren rekursiv definiert. Damit wird jeder Wert eines Typs ein Ket-Vektor. Die Tuple-Typkonstruktion erfolgt über das Tensorprodukt und die Set-Typkonstruktion über die Potenzmenge:

- Elementare Typen sind $\mathtt{t}^H_{ZID}$, $\mathtt{t}^H_{Käse}$, $\mathtt{t}^H_{AID}$ mit den entsprechenden Hilberträumen als Wertebereiche
  $dom(\mathtt{t}^H_{ZID}) = \{|1\rangle, \ldots, |9\rangle\}$, $dom(\mathtt{t}^H_{Käse}) = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ und $dom(\mathtt{t}^H_{AID}) = \{|\mathsf{O}\rangle, |\mathsf{N}\rangle\}$.
- $\mathtt{t}^H_{Zustandstupel}$=`tuple(ZID:`$\mathtt{t}^H_{ZID}$`, Käse:`$\mathtt{t}^H_{Käse}$`)` mit dem Hilbertraum
  $dom(\mathtt{t}^H_{Zustandstupel}) = dom(\mathtt{t}^H_{ZID}) \otimes dom(\mathtt{t}^H_{Käse})$
- $\mathtt{t}^H_{Aktionsstupel}$=`tuple(vonZID:`$\mathtt{t}^H_{ZID}$`,AID:`$\mathtt{t}^H_{AID}$`,nachZID:`$\mathtt{t}^H_{ZID}$`)` mit dem Hilbertraum $dom(\mathtt{t}^H_{Aktionstupel}) = dom(\mathtt{t}^H_{ZID}) \otimes dom(\mathtt{t}^H_{AID}) \otimes dom(\mathtt{t}^H_{ZID})$
- $\mathtt{t}^H_{Zustände}$=`set(`$\mathtt{t}^H_{Zustandstupel}$`)` mit dem Hilbertraum
  $dom(\mathtt{t}^H_{Zustände}) = \{|z_i\rangle\}$ mit $z_i \in 2^{dom(\mathtt{t}^H_{Zustandstupel})}$
  Jede mögliche Untermenge von $dom(\mathtt{t}^H_{Zustandstupel})$ wird also mittels eines eigenen Ket-Vektor kodiert. Alternativ ist es auch möglich, Untermengen durch die Superposition von Quantenzuständen auszudrücken, welches die Dimensionsanzahl weniger explodieren lässt.
- $\mathtt{t}^H_{Aktion}$=`set(`$\mathtt{t}^H_{Aktionstupel}$`)` mit dem Hilbertraum
  $dom(\mathtt{t}^H_{Aktion}) = \{|a_i\rangle\}$ mit $a_i \in 2^{dom(\mathtt{t}^H_{Aktionstupel})}$
- $\mathtt{t}^H_{InnereBühne}$=`tuple(aktZustand:`$\mathtt{t}^H_{ZID}$`,Zustände:`$\mathtt{t}^H_{Zustände}$`,Aktion:`$\mathtt{t}^H_{Aktion}$`)`
  mit dem Hilbertraum $dom(\mathtt{t}^H_{InnereBühne}) = dom(\mathtt{t}^H_{ZID}) \otimes dom(\mathtt{t}^H_{Zustände}) \otimes dom(\mathtt{t}^H_{Aktion})$

Die innere Bühne IB^H ist nun ein Ket-Vektor $|I^H\rangle \in dom(\mathtt{t}^H_{InnereBühne})$. Operatoren zum Modifizieren des Zustands und Projektoren zum Messen des Zustands lassen sich analog rekursiv konstruieren. Zum Beispiel erfolgt die Einfügung eines neuen Aktionstupels durch das Ersetzen der Komponente $\mathtt{t}^H_{Aktion}$ von $|IB^H\rangle$ durch einen neuen Basisvektor, welcher die neue Teilmenge der möglichen Aktionen repräsentiert. Diese neue Menge ist durch die Einfügung des neuen Aktionstupels in die bestehende Menge entstanden. Mit folgendem Projektor lässt sich beispielsweise das Vorhandensein des `Aktion`-Tupels $(2,1,3)$ für eine O-Aktion ausgehend vom Zustand 2 in der inneren Bühne testen:

$$I^H_{ZID}{}^{4} \otimes I^H_{Zustände} \otimes \sum_{\substack{i|(2,1,3)\in ZS_i \\ \wedge ZS_i \subseteq dom(\mathtt{t}^H_{Aktionstupel})}} |i\rangle\langle i|.$$

In [11] wird für eine Messung die Quantenanfragesprache QQL vorgestellt.

[4] Die Matrix I^H steht für die Einheitsmatrix im jeweiligen Hilbertraum.

6 Ausblick

In dieser Arbeit wurde die innere Bühne mit den Mitteln der Datenbankmodellierung formal beschrieben. Es wurde anhand eines Beispiels gezeigt, dass dieser Entwurf sich problemlos in die Quantenmechanik übertragen lässt. Als Ergebnis wird der Zustand der inneren Bühne als ein spezieller, normierter Vektor dargestellt. Die Quantenmechanik liefert viele weitere Konzepte, die auf unser Agentenproblem erfolgversprechend angewandt werden können. Als Ausblick sollen daher die Konzepte Wahrscheinlichkeiten bei der Quantenmessung, Superposition, Mischzustände, Quantenlogik und Verschränkung untersucht werden.

Literatur

[1] BANCILHON, F.: *Object-Oriented Databases*. In: TUCKER, A. B. (Hrsg.): *The Computer Science and Engineering Handbook*, S. 1158–1170. CRC Press, 1997.

[2] BISCHOF, N.: *Psychologie, ein Grundkurs für Anspruchsvolle*. Verlag Kohlhammer, 2009. 2. Auflage.

[3] BUSEMEYER, J.R.; WANG, Z. und A. MOGILIANSKY-LAMBERT: *Comparison of quantum and Markov models of decision making*. In: *Journal of Mathematical Psychology, (53) 5*, S. 423 – 433, 2009.

[4] CHEN, P. P.: *The Enity-Relationship Model: Toward a Unified View of Data*. In: KERR, D. S. (Hrsg.): *Proceedings of the International Conference on Very Large Data Bases, September 22-24, 1975, Framingham, Massachusetts, USA.*, S. 173. ACM, 1975.

[5] CODD, E. F.: *A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks*. Commun. ACM, 13(6):377–387, 1970.

[6] DIRAC, P.: *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 4th Aufl., 1958.

[7] ELMASRI, R. und S. B. NAVATHE: *Fundamentals of Database Systems, 3rd Edition*. Addison-Wesley-Longman, 2000.

[8] MAIER, D.: *The Theory of Relational Databases*. Computer Science Press, 1983.

[9] NIELSEN, M. A. und I. L. CHUANG: *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.

[10] RÖMER, R., M. HUBER und G. WIRSCHING: *Ein Beitrag zur Gedankengeometrie kognitiver Systeme*. In: JOKISCH, O. (Hrsg.): *Tagungsband, 27. Konferenz Elektronische Sprachsignalverarbeitung, 02.-04.03.2016, Leipzig*, S. 101 – 110, 2016.

[11] SCHMITT, I.: *QQL: A DB&IR Query Language*. VLDB J., 17(1):39–56, 2008.

[12] SUTTON, R. und A. BARTO: *Reinforcement Learning: An Introduction*. MIT Press, Cambridge, MA, 1998.

[13] WOLFF, M., W. MEYER und R. RÖMER: *Modellierung von Bewältigungsverhalten mit Merkmal-Werte-Relationen*. In: WIRSCHING, G. (Hrsg.): *Tagungsband, 26. Konferenz Elektronische Sprachsignalverarbeitung, 25.-27.03.2015, Eichstätt*, S. 224 – 231, 2015.

[14] WOLFF, M., R. RÖMER und G. WIRSCHING: *Towards coping and imagination for cognitive agents*. In: *2015 6th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom)*, S. 307–312, Oct 2015.