Ein Beitrag zur Gedankengeometrie Kognitiver Systeme

Ronald Römer, Markus Huber und Günther Wirsching

BTU Cottbus-Senftenberg, Katholische Universität Eichstätt
ronald.roemer@b-tu.de

Kurzfassung: Die Formalisierung höherer psychologischer Konzepte wie Coping und Reifikation durch bestimmte semantische Modelle erlaubt die Repräsentation abstrakter Objekte in einem geometrischen Raum. Damit können derartige Objekte als Überlagerung von Elementarphänomenen aufgefasst werden. Dies deckt sich mit der Auffassung von Gestaltpsychologen, welche diese These für die Objekte der Wahrnehmung bereits im 19. Jahrhundert durch wohldurchdachte Experimente stützen konnten. Mit einem solchen geometrischen Modell für Gedanken als Objekte des Denkens ließe sich die Vorstellung vom „Denken als Folge von Rechenoperationen“ leichter umsetzen. Außerdem können wir durch die nun getrennte formale Darstellung von Informationsinhalt und -form beschreiben, wie die Objekte des Denkens kommuniziert werden können. Für die Modellierung der Gedankenverarbeitung sehen wir großes Potential beim mathematischen Apparat der Quantenmechanik. Dieser Ansatz folgt dem Kerngedanken der Systemtheorie, da hier die unterschiedlichen Konzepte geometrischer Raum, Wahrscheinlichkeit und Logik in einheitlicher Darstellung behandelt werden können.

1 Einführung

Kommunikation dient kognitiven Agenten zur Aufdeckung von Strukturen in deren Umfeld und somit auch dem Abgleich von Vorstellungen über deren Umgebung. Vorstellungen sind hilfreich um ein inneres Umgebungsmodell zu entwickeln, damit können die Konsequenzen der eigenen Handlungen vorhergesagt werden. Solche Vorhersagen und insbesondere die dabei auftretenden Vorhersagefehler ermöglichen eine Adaption an das Umfeld. Hierzu ist jedoch ein Informationsaustausch erforderlich, wobei zwischen dem Informationsinhalt und dem Informationsträger unterschieden werden muss.

In vorangegangenen Beiträgen [1, 2] haben wir verschiedentlich gezeigt, wie die Informationsträger des Agenten im Zuge der Informationsreduktion (Perzeption) bzw. Informationszunahme (Aktion) ihre Form systematisch ändern. Dieser Prozess beginnt bei den Vorstellungen (beschriftete partielle Ordnungen, LPO) und setzt sich über Zeichen (Totalordnungen) bis hin zu den Signalen fort. Wir haben weiterhin in Ansätzen gezeigt, wie dieser Prozess mathematisch modelliert und technologisch einheitlich durch Komposition verschiedener Informationsträger (PNT, FST und SST) nachgebildet werden kann.

Zur Modellierung des Informationsinhalts schlägt die theoretische Psychologie sich überlagernde Elementarphänomene vor. Hinweise auf die Existenz solcher Elementarphänomene haben Gestaltpsychologen in wohldurchdachten Experimenten schon vor längerer Zeit feststellen können [3]. Frühe Ansätze zur formalen Modellierung von sich überlagernden Elementarphänomenen entstammen der Informationstheorie [4] und dem Information-Retrieval (IR) [5]. Beide Ansätze beruhen auf einem geometrischen Vektormodell, in dem voneinander unabhängige Elementaraussagen durch eine Linearkombination von Basisvektoren repräsentiert werden.

Unsere Ergebnisse zum Adaptionsmechanismus „Coping“ weisen ebenfalls in diese Richtung [6]. Ähnliches gilt für jüngere Arbeiten auf dem Gebiet des IR. In [7] bzw. [8] wurde gezeigt, wie mit dem Übergang zu geometrischen Modellen der Umgang mit unscharfer Information und unscharfer Logik ermöglicht wird.

Im diesjährigen Beitrag untersuchen wir die Frage, ob mit der Erfassung semantischer Information in Form von LPO eine Modellierung des Informationsinhalts durch „Gedankenvektoren“ in einem geometrischen Raum erfolgen kann, in dem dann in geeigneter Weise das Rechnen mit Gedanken ermöglicht wird. In Abschnitt 2 gehen wir kurz auf die zwei wichtigsten Adaptionsmechanismen biologischer Organismen und deren Modellierung ein. Dabei wird noch einmal die bei Primaten beobachtete Fähigkeit zur Reifikation hervorgehoben. Die formale Beschreibung von Bewältigungsverhalten unter Verwendung der Reifikation wird in Abschnitt 3 skizziert. Im nächsten Abschnitt erfolgt eine geometrische Interpretation mit der in Abschnitt 5 der Bezug zum Mouse-Maze Problem hergestellt werden kann. Die sich dabei aufdrängenden Analogiebetrachtungen zum IR werden im Abschnitt 6 behandelt, sie bilden auch den Schwerpunkt der Schlussbetrachtung.

2 Reifikation und Bewältigungsverhalten

Finale Systeme sind nach [3] dadurch gekennzeichnet, dass die Struktur der Verhaltenssteuerung von biologischen Organismen durch die natürliche Selektion bestimmt wird. Sie wählt diejenigen Organismen aus, welche am besten an die natürliche Umgebung angepasst sind. Danach kann man die Auffassung vertreten, dass sich die Strukturen der Verhaltenssteuerung in die Umgebung einpassen und so von ihr geformt werden. In diesem Sinne wollen wir Strukturen als Bedeutungsträger verstehen. Aus der theoretischen Psychologie sind zwei adaptive Mechanismen bekannt:

- Der Instinkt ist ein Mechanismus, der es dem Organismus erlaubt, ohne Einsicht und Erfahrung adaptiv auf die Umgebung einzuwirken. Auf dieser Ebene findet die Adaption auf genetisch vorbestimmte Weise statt.

- Höherentwicklungen von kognitiven Funktionen setzen dagegen am sogenannten Coping-Apparat an. Dieser wird in der theoretischen Psychologie als Universalinstrument aufgefasst, das auf verschiedenste Probleme anwendbar ist (General Problem Solver).

Coping. Der Coping-Apparat wird immer dann aktiv, wenn Barrieren die Erreichung der Ziel- oder Endsituation verweigern und damit die Adaptation an die Umgebung verhindern. Dies ist häufig auf eine unzureichende sensomotorische Ausstattung zurückzuführen. Für deren Erweiterung werden hauptsächlich zwei Klassen von Coping-Strategien unterschieden: alloplastisches-(Veränderung der Umwelt) und autoplastisches Coping (Veränderung des Organismus).

Reifikation. Grundlegend für die semantische Modellierung ist die Repräsentation der Welt durch eine Menge von abstrakten, wohlunterschiedenen Objekten und den Beziehungen, die sie miteinander eingehen. Diese Beziehungen prägen der Objektmenge eine Struktur auf. Die Objekte selbst werden durch Attribute beschrieben; damit wird der Wesenskern des philosophisch geprägten Begriffs „Ding“ erfasst.

Um komplexe Sachverhalte zu erfassen und Probleme zu lösen, besteht eine Strategie darin, die Verknüpfung oder Komposition von Objekten zu ermöglichen. Dazu müssen Attribute und/oder Relationen reifiziert (verdinglicht) werden. D.h. durch die Reifikation werden Relationen in abstrakte Objekte überführt, welche nun durch die Ausprägung ihrer Attribute unterschieden werden können. Nach [3] sind beide Mechanismen – Coping und Reifikation – wesentliche Voraussetzungen für die beobachtbaren Intelligenzleistungen bei Primaten.

3 Formale Beschreibung von Coping unter Verwendung der Reifikation

In [9] und [6] haben wir erstmals computertaugliche Algorithmen für inventives Coping unter Verwendung der Reifikation vorgestellt, dabei wurden zunächst nur die Relationen zwischen den Objekten verdinglicht. Nach diesem ersten Schritt können aus Aktionsobjekten mit qualitativ gleichen Attributen neuen Strukturen erzeugt werden, so dass eine Erweiterung des Aktionsrepertoires ermöglicht wird. Die folgende Zusammenfassung skizziert die grundlegende Idee und nennt die wichtigsten Ergebnisse der o.g. Veröffentlichung.

Die Welt, in der sich der Agent bewegt, wird durch einen *Finite State Transducer* modelliert:

$$\mathcal{W} = \big(A \cup \{\delta\}, O, Z, I{=}Z, F, E\big).$$

Dieser verfügt über eine endliche Menge von Zuständen Z – wobei alle $z \in Z$ Initialzustände sein können – und eine Menge von Schlusszuständen $F \subseteq Z$ welche die Ziele des Agenten in der Welt repräsentieren. Eine Transition $e \in E = Z \times (A \cup \{\delta\}) \times O \times Z$ akzeptiert eine Aktion a und erzeugt eine Observation o.

Wir nehmen zunächst an, dass der Agent instinktiv die Semantik der Weltzustände versteht, aber noch keinen Zugriff auf die Semantik der Aktionen hat. In beiden Fällen wird die Semantik von einer Merkmal-Werte-Relation (MWR) repräsentiert. Weiterhin gewinnt der Agent in einer Explorationsphase Kenntnis von geordneten Paaren (z, z'), welche in der Welt einen Wechsel zum Zustand z' repräsentieren, falls sich der Agent zuvor im Zustand z befunden hat. Jedes dieser geordneten Paare kann als spezieller Fall einer vorstellbaren Aktion verstanden werden. Wenn nun im Folgenden die semantische Struktur der Weltzustände berücksichtigt wird, dann kann mathematisch gezeigt werden, dass die vorstellbaren Aktionen unterschieden und benannt werden können.

Hierfür definieren wir zunächst Äquivalenzrelationen $\sim$ auf der Menge der Paare $Z \times Z$. Dabei wird mit der Aktion $a(z, z') \subset Z \times Z$ eine Klasse von Paaren $(u, u') \in Z \times Z$ bezeichnet, welche dem Paar (z, z') gleichartig sind. Die vollständige Menge möglicher Aktionen kann nun schließlich durch die Menge der Äquivalenzklassen – welche $Z \times Z$ partitionieren – definiert werden:

$$\widehat{A} := (Z \times Z)/\sim = \{a(z, z') : (z, z') \in Z \times Z\}\,. \tag{1}$$

Damit ergeben sich auf recht natürliche Weise Kompositionen aus elementaren Aktionen, welche durch die partitionierenden Teilmengen von $Z \times Z$ definiert sind:

$$a(z, z') \circ a(z', z'') := a(z, z'')\,. \tag{2}$$

Darüber hinaus können zwei weitere strukturelle Ergebnisse aus [6] hervorgehoben werden. Das neutrale Element der Menge der vorstellbaren Aktionen wird von der Äquivalenzklasse

$$\Delta_Z := \{(z, z) : z \in Z\} \in \widehat{A},$$

gebildet. Weiterhin existiert zu jedem $a = a(z, z') \in \widehat{A}$ ein inverses Element

$$a^{-1} := a(z', z) \in \widehat{A}\,.$$

Abschließend weisen wir mit Gleichung (3) darauf hin, dass $\widehat{A}$ auf der Menge der Weltzustände Z *operiert*.

$$z \odot a(z, z') := z'\,. \tag{3}$$

Die oben beschriebene Prozedur kann nun am Beispiel des Mouse-Maze Problems illustriert werden. Wir nehmen an, dass die Information über den Zustand z durch eine MWR gegeben ist:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{POS} & x & z_x \\ & y & z_y \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Diese Struktur trägt die Zustandsinformation, dass der x-Koordinate der Wert z_x und der y-Koordinate der Wert z_y zugewiesen wurde. Eine mögliche Aktion beschreibt eine *Änderung* vom Zustand z zum Zustand z'. Daher erscheint es natürlich, die *Differenz* zwischen den Zuständen in Form einer MWR zu beschreiben (Reifikation):

$$\begin{bmatrix} \mathsf{MOVE} & \Delta x & a_x \\ & \Delta y & a_y \end{bmatrix}, \tag{5}$$

deren Komponenten durch die elementweise Subtraktion definiert sind:

$$a_x := z'_x - z_x, \quad a_y := z'_y - z_y. \tag{6}$$

In diesem Fall ist es nahe liegend, zwei Zustandsübergänge (z, z') und (w, w') als äquivalent zu betrachten, wenn die Differenzen der Komponenten übereinstimmen:

$$(z, z') \sim (w, w') \quad :\Leftrightarrow \quad w'_x - w_x = z'_x - z_x \text{ und } w'_y - w_y = z'_y - z_y.$$

Damit führen äquivalente Paare zur gleichen MWR (5); also ist die dadurch gegebene Reifikation sinnvoll. Entsprechend Definition (1) kann nun die Menge der vorstellbaren Aktionen angeben werden:

$$\widehat{A} := \left\{ \begin{bmatrix} a & \Delta x & a_x \\ & \Delta y & a_y \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} \text{there are world states } z, z' \\ \text{with } a_x = z'_x - z_x,\ a_y = z'_y - z_y \end{array} \right\}.$$

Die Semantik effektiver Aktionen, also derjenigen Aktionen für die in einer konkreten Umgebung ein Zustandswechsel beobachtet wird, ist bspw. durch eine MWR für die jeweiligen Himmelsrichtung (N,E,W,S) gegeben.

$$\begin{bmatrix} \mathsf{E:MOVE} & \Delta x & 1 \\ & \Delta y & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathsf{S:MOVE} & \Delta x & 0 \\ & \Delta y & -1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \mathsf{W:MOVE} & \Delta x & -1 \\ & \Delta y & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathsf{N:MOVE} & \Delta x & 0 \\ & \Delta y & 1 \end{bmatrix}.$$

Neben diesen elementaren Aktionen können durch Differenzbildung noch weitere – nun aber komponierte – Aktionen wie NE, NW, SE, SW, gefunden werden. Diese werden jedoch nur dann benötigt, wenn die Umgebung solche Strukturen zur Problemlösung erforderlich macht.

4 Interpretation mit Hilfe der Inzidenzgeometrie

Unsere Ergebnisse zum Adaptionsmechanismus „Coping" weisen darauf hin, dass sich sowohl die Bewegungsgleichung (3) als auch Coping (6) geometrisch interpretieren lassen. Im Folgenden wird dieser geometrische Ansatz näher untersucht.

In der Inzidenzgeometrie wurden Zusammenhänge zwischen geometrischen Axiomen und algebraischen Strukturen untersucht [10, 11]. Für uns ist interessant, welche geometrischen Axiome sicher stellen, dass die Menge der Zustände als Teilmenge eines reellen Vektorraums aufgefasst werden kann.

In der Inzidenzgeometrie betrachtet man Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ bestehend aus einer Menge $\mathcal{P}$ von *Punkten*, einer Menge $\mathcal{G}$ von *Geraden*, und einer *Inzidenzrelation* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$. Für einen Punkt $P \in \mathcal{P}$ und eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ wird eine formale Aussage der Form $(P, g) \in \mathcal{I}$ dann durch „ P inzidiert mit g", oder „der Punkt P liegt auf der Geraden g", oder ähnlich verbalisiert. Man sagt, zwei Geraden g und h *schneiden* sich, wenn es einen Punkt P gibt, der sowohl mit g als auch mit h inzidiert. Ein *projektiver Raum* ist nun ein Tripel $\mathbb{P} = \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$, in dem die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

Reichhaltigkeitsaxiom: Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.

Geradenaxiom: Durch je zwei verschiedene Punkte A, B geht genau eine Gerade; diese wird mit AB bezeichnet.

Pasch-Veblen-Axiom: Sind A, B, C, D, E fünf verschiedene Punkte mit $AB = AC \neq AD = AE$, schneiden sich die Geraden BD und CE.

Das Pasch-Veblen-Axiom bedeutet anschaulich, dass sich zwei Geraden genau dann schneiden, wenn sie in einer Ebene liegen – hierbei ist zu beachten, dass in der projektiven Geometrie zwei „parallele“ Geraden sich „im Unendlichen“ schneiden.

Sei nun ein Divisionsring $\mathbb{D}$ und ein Vektorraum V über $\mathbb{D}$ gegeben. Daraus lässt sich ein projektiver Raum gewinnen, indem man zunächst die Punkte und affinen Geraden in V betrachtet, und anschließend zu jeder Schar paralleler Geraden einen „Punkt im Unendlichen“ und zu jeder Schar paralleler affiner Ebenen eine „Gerade im Unendlichen“ hinzufügt. Den so entstandenen projektiven Raum nennt man einen *koordinatisierten projektiven Raum*. Das bemerkenswerte Resultat lautet wie folgt [10, p. 10]:

Theorem 1 *Jeder projektive Raum, in dem auf jeder Geraden mindestens drei Punkte liegen, und der ein Paar disjunkter Geraden enthält, ist isomorph zu einem koordinatisierten projektiven Raum über einem Divisionsring.*

Damit der Divisionsring $\mathbb{D}$ als ein Unterkörper der reellen Zahlen betrachtet werden kann, ist als zusätzliche Bedingung erforderlich, dass $\mathbb{D}$ *archimedisch angeordnet* ist [12, S. 47]. Das heißt, es gibt eine totale Ordnungsrelation $<$ auf $\mathbb{D}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{D}$ gilt: $\quad a < b \Rightarrow a + c < b + c.$

(ii) Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{D}$ mit $c > 0$ gilt: $\quad a < b \Rightarrow ac < bc.$

(iii) Für beliebige $x, y \in \mathbb{D}$ mit $x > 0$ gilt: Es gibt eine natürliche Zahl n mit $nx > y$.

Um diese Bedingung geometrisch zu formulieren, stellen wir zunächst fest, dass man auf einer beliebigen Geraden g in einem über $\mathbb{D}$ koordinatisierten projektiven Raum durch Festlegen eines *Nullpunkts N* und eines *Einspunkts E* auf g eine Bijektion

$$\{\text{Punkte auf } g\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{D} \cup \{\infty\} \tag{7}$$

erhält. Dadurch überträgt sich auch die Anordnung $<$ von $\mathbb{D}$ auf die *punktierte Gerade*

$$g' := g \setminus \{\infty\},$$

also auf die Gerade ohne ihren „Punkt im Unendlichen“. Bedingung (iii) kann nun auf g' so formuliert werden:

(iii)' Hat man eine beliebig kleine Strecke s, und ist y ein beliebiger Punkt auf g', dann kann man, ausgehend vom Nullpunkt, durch wiederholtes Abtragen der Strecke s bis über den Punkt y hinaus gelangen.

Insgesamt erhalten wir aus der Inzidenzgeometrie das folgende Ergebnis:

Theorem 2 *Angenommen, die (idealisierte) Menge Z der Zustände unseres Agenten hat die folgende Eigenschaft:*

- *Durch Hinzufügen einer Menge P_∞ geeigneter „Punkte im Unendlichen“ wird $Z \cup P_\infty$ zur Punktmenge eines projektiven Raums, in dem auf jeder Geraden mindestens drei Punkte liegen, der ein Paar disjunkter Geraden enthält, und in dem jede punktierte Gerade archimedisch angeordnet ist.*

Dann kann Z als Vektorraum über einem Unterkörper der reellen Zahlen aufgefasst werden.

5 Bezug zum Mouse-Maze Problem

Mit den vorangegangenen Betrachtungen kann eine Brücke von der semantischen- zur vektoriellen Darstellung von Zuständen und Aktionen geschlagen werden. Die Idee hierzu wird in den Abbildungen 1 und 2 veranschaulicht. Merkmale und Werte der LPO's werden sowohl für den Zustand als auch für die Aktion von gewichteten Vektoren repräsentiert, welche im gleichen geometrischen Raum vorliegen. Zustandsänderungen (Bewegungsgleichung) oder Aktionen (Coping) können somit im geometrischen Raum berechnet und über die wechselnden Informationsträger an den Kommunikationspartner übertragen werden. Dieser Schritt stellt in Aussicht, dass es sich in einem solchen Gedankenraum bequemer rechnen lässt, als dies mit gewichteten LPO's als Bedeutungsträger der Fall wäre. Ein natürlicher Ansatz für die Umsetzung dieser Idee lässt sich folgendermaßen beschreiben:

- Zustände und Aktionen werden als abstrakte Objekte verstanden,
- den Merkmalen der Objekte werden bijektiv Basisvektoren zugeordnet, welche linear unabhängig voneinander sind,
- Merkmalwerte werden als Gewichte der jeweiligen Basisvektoren interpretiert,
- beide Objekte werden als gewichtete Summe von Basisvektoren verstanden, die der gleichen Basis angehören.

Die Verknüpfung eines Zustand mit einer Aktion führt zu einem neuen Zustand. Die zugehörige Bewegungsgleichung lässt sich demnach als Vektoraddition interpretieren und kann dem Agenten als Vorhersage dienen. Dagegen benötigt das Coping die Umkehroperation der Addition.
Vektoren sind durch Projektion auf ihre Basisvektoren zerlegbar. Dies steht im Einklang mit den Beobachtungen der Gestaltpsychologen, wonach wahrgenommene Objekte als Überlagerung von Elementarphänomenen aufzufassen sind. Mit einem solchen geometrischen Modell stellen sich einige interessante mathematische Fragen in Bezug auf die Existenz einer umkehrbaren Linearen Transformation T:

- $\vec{z} = T(LPO_z)$ bzw. $\vec{a} = T(LPO_a)$
- $T(LPO_{z'}) = T(LPO_a) + T(LPO_z) = T(LPO_a + LPO_z)$
- $LPO_{z'} = T^{-1}(\vec{z}')$

Ähnlich wie bei den bekannten Transformationen der Systemtheorie, steht hier der Wunsch nach einer eleganten Rechenmethode im Vordergrund.

6 Analogiebetrachtungen zum Information-Retrieval

Der oben beschriebene Ansatz ähnelt dem Konzept, nach dem das IR die Dateneinheiten der zugehörigen Informationsverarbeitung modelliert. Dabei werden Anfragen und Artefakte (Textdokumente, Bilder etc.) durch normierte Vektoren dargestellt und in einem gemeinsamen geometrischen Raum einer Ähnlichkeitsprüfung unterzogen. Darüber hinaus treten beim IR auch Dialogsituationen auf. Dies erlaubt dem Benutzer durch ein Relevance-Feedback die gefundenen Dokumente interaktiv mit den eigenen Vorstellungen zum Suchergebnis abzugleichen und die Suche stärker einzugrenzen. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick zu zwei grundlegenden Methoden der IR-Modellierung gegeben.

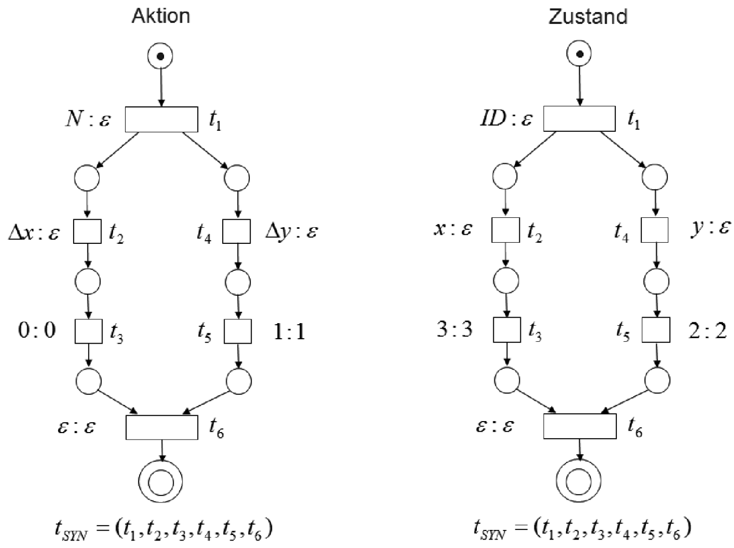

Abbildung 1 - Beispiele für LPO's in der Ausführungsform Petrinetz-Transducer für die Objekte Zustand und Aktion. Für die Vorhersage des neuen Zustands müssen beide Objekte in geeigneter Weise verknüpft werden. Für die Übertragung der Information müssen die unten angegebenen Schaltfolgen spezifiziert werden. Damit liegen für die Verarbeitung durch FST's Linearordnungen vor.

6.1 Klassisches Vektorraummodell

Die Darstellung der historisch gesehen älteren Methode erfolgt in Anlehnung an Abschnitt 5, dadurch können die Gemeinsamkeiten verdeutlicht werden. Die Analogie zum Kommunikationsmodell beim Mouse-Maze Problem zeigt Abbildung 2.

- Indexterme werden Elementen einer orthogonalen Basis zugeordnet,
- die (normierte) Häufigkeit der Indexterme wird als Gewicht interpretiert.
- Sowohl die Anfrage als auch das Dokument werden durch Vektoren $\vec{q}$ bzw. $\vec{x}$ modelliert. Sie werden als gewichtete Summe von Basisvektoren verstanden, die der gleichen Basis angehören.
- Unter Verwendung des Skalarprodukts $\vec{x} \cdot \vec{q} = |\vec{x}| \cdot |\vec{q}| \cos \phi$ kann die Ähnlichkeit von Anfrage und Dokument berechnet werden.

Im Laufe der Zeit haben sich für das IR ähnliche Anforderungen wie in der Sprachverarbeitung bzw. Mustererkennung entwickelt. Unscharfe Anfragen erfordern auch hier probabilistische Modelle, Dialoge erfordern eine Strategie und komplexe Anfragen müssen mit den Mitteln der Logik formuliert werden. Zur Meisterung dieser Anforderungen verfolgt das IR einen quantenmechanischen Ansatz.

6.2 Quantenmechanisches IR-Modell

In der Quantenmechanik (QM) werden Observable und Systemzustände unterschieden. Systemzustände werden als normierte Vektoren im Hilbertraum aufgefasst. Observablen stellen

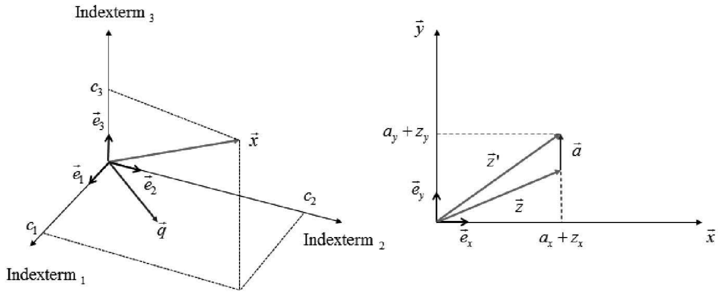

Abbildung 2 - Vergleich der Informationsdarstellung beim klassischen IR-Modell und dem Mouse-Maze Problem. Den Basisvektoren des geometrischen Raums werden Merkmale einer MWR (rechts) bzw. Indexterme (links) bijektiv zugeordnet. Die multiplikativen Koeffizienten werden von den Werten der MWR (rechts) bzw. den relativen Häufigkeiten der Indexterme (links) bestimmt.

messbare Größen dar, sie werden mathematisch von selbstadjungierten Operatoren $P^* = P$ repräsentiert. Besonders einfache Operatoren sind Projektoren, für diese gilt zusätzlich $P^2 = P$ (Idempotenz). Solche Operatoren haben die Eigenschaft, dass sie nur reelle Eigenwerte aufweisen. Im Fall von Projektoren können sie nur die Werte 0 und 1 annehmen. Die Eigenwerte sind das Ergebnis der Messung von Observablen. Die Messung selbst hängt vom Systemzustand ab und liefert jeden der möglichen Werte 0 oder 1 mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. In [7] wurde der zugehörige mathematische Apparat der QM auf die Problemstellung des IR angewendet. Dabei gilt:

- Abstrakte Objekte wie Anfragen (Observable) und Artefakte (Systemzustand) werden von den normierten (kanonischen) Vektoren $\|\vec{q}\| = 1$ und $\|\vec{z}\| = 1$ repräsentiert.
- Für eine Messung werden beide Objekte von Operatoren (Matrizen in Dirac-Notation) repräsentiert: $Q = |q\rangle\langle q|$, $Z = |z\rangle\langle z|$.
- Bewegungen des Systemzustands werden ebenfalls durch Operatoren erfasst: $\vec{z}' = O \cdot \vec{z}$.
- Im quantenmechanischen Modell lassen sich Operatoren unter Verwendung einer Basis des Hilbertraums in eine gewichtete Summe elementarer Projektoren zerlegen.
- Observable Q werden von einer gewichteten Summe orthogonaler Projektoren P_i repräsentiert.
- Die Repräsenation des Systemzustands erfolgt durch die sogenannte Density-Matrix D, welche ebenfalls in Projektoren zerlegbar ist. Für die Spur der Density-Matrix gilt:

$$\mathrm{Tr}(D) = 1.$$

Mit der Zerlegung besteht die Möglichkeit, Projektionen auf Unterräume P_L zu realisieren. Das Gleason-Theorem [7] besagt nun, dass bei entsprechend normierten Zustandsvektoren Wahrscheinlichkeiten für die Unterräume angegeben werden können:

$$\mathrm{Tr}(D \cdot P_L) = \cos^2 \phi_1 + ... + \cos^2 \phi_L. \tag{8}$$

Die einzelnen Summanden geben hier die Wahrscheinlichkeiten für die Antworten (Eigenwerte 0,1) auf die einzelnen Binärfragen (Projektoren) in dem von der Anfrage aufgespannten Unterraum an.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des quantenmechanischen Modells besteht in der Möglichkeit der Superposition. Kanonische Basisvektoren können sich demnach überlagern ohne sich gegenseitig zu stören, darauf kann in diesem Beitrag jedoch nicht näher eingegangen werden. Es sei aber abschließend noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es bei der IR-Problemstellung im Kern um die Bewertung der Ähnlichkeit von Anfrage und Artefakt geht. Dies ist gerade nicht die Zielstellung beim Mouse-Maze Problem. Hier wird stattdessen eine Algebra gesucht, mit der Aktionen $a \in A$ und Zustände $z \in Z$ zu einem neuen Zustand $z' \in Z$ verknüpft werden können. Für das Coping wird dementsprechend die Umkehroperation benötigt.

Es kann aber festgestellt werden, dass die Informationsdarstellung in beiden Fällen ähnlich ist. Der Unterschied besteht hier darin, dass im Gegensatz zum klassischen IR-Modell nun *jedem Wert eines Merkmals* genau ein Element aus einer orthogonalen Basis zugeordnet wird. Detaillierte Fragestellungen nach geeigneten geometrisch-algebraischen Strukturen zur Darstellung von Zuständen und Aktionen müssen in der Zukunft geklärt werden. Falls sich jedoch der QM-Ansatz auf kognitive Systeme übertragen lässt, würden sich interessante Ansätze zur Lösung des Mouse-Maze Problem ergeben:

- Der durch die QM beschriebene Zusammenhang zwischen Raumgeometrie und Wahrscheinlichkeit erlaubt die Modellierung von nichtderministischen Welten.
- Die Interpretation von Objekten in Parallelwelten erfolgt durch einen Wechsel der Basis.
- Da Operatoren ebenfalls zerlegbar sind, stellt dies eine weitere Möglichkeit dar, um abstrakte Objekte als Überlagerung von Elementarphänomenen zu beschreiben.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem hier implizit angesprochenen Kommunikationskonzept schlagen wir eine formale Trennung zwischen der Informationsform und der Darstellung des Informationsinhalts vor. Wir beschreiben den Informationsinhalt durch ein geometrisches Modell, welches im Kern den Vorstellungen der theoretischen Psychologie entspricht. D.h. geistige Vorstellungen oder Gedanken werden als Überlagerung von Elementarphänomenen verstanden, mit denen gerechnet werden kann. Um derartige Vorstellungen oder Gedanken austauschen zu können, muss der Informationsinhalt solange die Form wechseln, bis ein Signal vorliegt und dieses über einen physikalischen Kanal übertragen werden kann. Die nötigen Informationsträger sind neben dem Signal die von uns beschriebenen SST, FST und PNT. Diese Träger übersetzen von der Signal- über die Symbol- bis hin zur Semantikdarstellung und umgekehrt. Für das Rechnen mit Gedanken in einem geometrischen Raum scheint insbesondere der mathematische Apparat der Quantenmechanik geeignet zu sein, da mit diesem die unterschiedlichen Gebiete Lineare Algebra, Wahrscheinlichkeitstheorie und Logik elegant miteinander kombiniert werden können. Diesen Ansatz werden wir zukünftig weiter verfolgen.

Literatur

[1] RÖMER, R. und M. WOLFF: *Konzeption eines kognitiven Systems für den experimentellen Einsatz in Forschung und Lehre*. ESSV 2015, Eichstätt 2015.

[2] HUBER, M. und R. RÖMER: *Modellierung des Semantik-Syntax-Grenzübergangs kognitiver Systeme am Beispiel des „Mouse-Maze“-Problems*. ESSV 2015, Eichstätt 2015.

[3] BISCHOF, N.: *Psychologie, ein Grundkurs für Anspruchsvolle*. Verlag Kohlhammer, 2009. 2. Auflage.

[4] MACKAY, D.M.: *Information, Mechanism and Meaning*. The MIT Press, 1969. 1. Auflage.

[5] SALTON, G.: *Automatic Information Organization and Retrieval*. 1968.

[6] WOLFF, M.; RÖMER, R. und G. WIRSCHING: *Towards Coping and Imagination for Cognitive Agents* . 6th IEEE Conference on Cognitive Infocommunications, Györ 2015.

[7] RIJSBERGEN, C.J. VAN: *The Geometry of Information Retrieval*. Cambridge University Press, 2004. 1. Auflage.

[8] SCHMITT, I.: *QQL: A DB&IR Query Language*. The VLDB Journal, (Vol. 17), 2008.

[9] WOLFF, M.; MEYER, W. UND RÖMER R.: *Modellierung von Bewältigungsverhalten mit Merkmal-Werte-Relationen* . ESSV 2015, Eichstätt 2015.

[10] BUEKENHOUT, FRANCIS und PETER CAMERON: *Projective and Affine Geometry over Division Rings*. In: BUEKENHOUT, FRANCIS [13], Seiten 27–62.

[11] BUEKENHOUT, FRANCIS: *An Introduction to Incidence Geometry*. In: *Handbook of Incidence Geometry* [13], Seiten 1–25.

[12] ARTIN, EMIL: *Geometric Algebra*. New York, 1957.

[13] BUEKENHOUT, FRANCIS (Herausgeber): *Handbook of Incidence Geometry*. Elsevier, 1995.