

ZUR FORMULIERUNG VON HIDDEN-MARKOV-MODELLEN ALS ENDLICHE TRANSDUKTOREN

Constanze Tschöpe und Matthias Wolff

*Fraunhofer IZFP Dresden, BTU Cottbus
constanze.tschoepe@izfp-d.fraunhofer.de*

Kurzfassung: Hidden-MARKOV-Modelle und endliche Transduktoren besitzen viele Gemeinsamkeiten. Trotzdem wurden sie in der Literatur bisher getrennt voneinander formuliert. Das führt oft dazu, dass a) mehrere Formelzeichen für das gleiche Symbol verwendet werden, b) unleserliche Gleichungen entstehen und c) mehrere Algorithmen das gleiche Problem beschreiben. Der Beitrag zeigt eine Formulierung von Hidden-MARKOV-Modellen als endliche Transduktoren. Eine solche Verfahrensweise bringt enorme Vereinfachungen. Die zwei wichtigsten Parameterschätzverfahren, VITERBI-Training und BAUM-WELCH-Algorithmus, können endlich einheitlich formuliert werden und unterscheiden sich nur durch den Gewichtshalbring. Natürlich sind auch die darin enthaltenen VITERBI- und Forward-Algorithmen bis auf diesen Halbring gleich. Auf diese Weise lassen sich die in der Literatur recht schwer zugänglichen Algorithmen relativ einfach formulieren.

1 Motivation

Viele Arbeiten auf dem Gebiet der akustischen Mustererkennung beschäftigen sich seit Jahren mit Hidden-MARKOV-Modellen und deren Einsatz für unterschiedliche Anwendungen. Aber immer wieder stoßen die Formulierungen an ihre Grenzen. Von großem Nutzen wäre eine mathematische Formulierung des kontinuierlichen Hidden-MARKOV-Modells (*continuous desity HMM*, CD-HMM) als endlicher Transduktor (*finite state transducer*, FST). Die Vorteile liegen auf der Hand: Zum einen wäre es dadurch möglich, eine einheitliche mathematische Formulierung von der Signal- bis zur syntaktischen Ebene, sogar bis zur Semiotik zu finden. Automatenoperationen, wie Summe, Produkt, KLEENEScher Abschluss, Komposition usw., könnten für HMMs genutzt werden. Zum anderen bietet die Formulierung als endlicher Transduktor große Vorteile und Vereinfachungen: VITERBI- und Forward-Algorithmen sind gleich bis auf den Gewichtshalbring, VITERBI- (*segmental-k-means-*) und BAUM-WELCH-Parameterschätzungen sind gleich bis auf den Gewichtshalbring und Likelihood- und Neglog-Likelihood-Berechnungen sind gleich bis auf den Gewichtshalbring.

2 Automatenformulierung

2.1 Algebraische Definition

Die folgende mathematische Formulierung von Hidden-MARKOV-Modellen als endliche Automaten bedient sich so weit wie möglich der Schreibweise von M. MOHRI (beispielsweise in

[6, 5]). Die Darstellung erfordert zusätzlich sowohl eine zeitliche und als auch eine räumliche Indizierung. Wenn eindeutig, verwenden wir zur Unterscheidung hoch- und tiefgestellte Indizes

$$x_i(k) = x_i^k \begin{matrix} \leftarrow \text{zeitlicher Index} \\ \leftarrow \text{räumlicher Index} \end{matrix} \quad (1)$$

Ein Hidden-MARKOV-Automat (HMA) ist ein 8-Tupel

$$\mathcal{H} = \{Z, I, F, \mathcal{O}, Y, S, Q, w\} \quad (2)$$

aus

- einem endlichen Zustandsalphabet Z ,
- einer Menge von Anfangszuständen $I \subseteq Z$,
- einer Menge von Schlusszuständen $F \subseteq Z$,
- einem M -dimensionalen Merkmalvektorraum $\mathcal{O} = \mathbb{R}^M$,
- einem Ausgabealphabet Y ,
- einem Gewichtshalbring $S = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes, \bar{0}, \bar{1})$,
- einer Menge von Merkmalzuordnungsfunktionen $Q = \{q_i\}, q_i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{K}$ und
- einer Verhaltensfunktion $w : Z \times Q \times Y \times Z \rightarrow \mathbb{K}$.

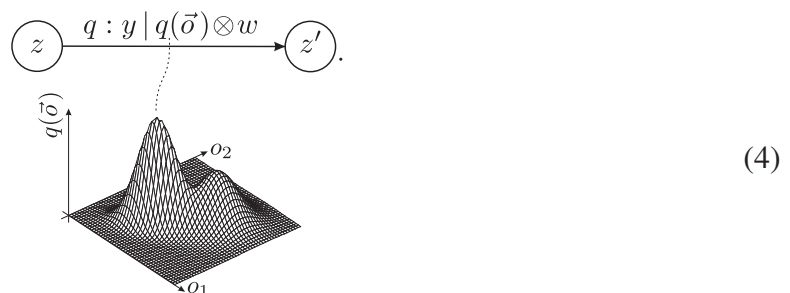
Die Verhaltensfunktion w wird oft als Liste E von Zustandsübergängen e angegeben:

$$E = \{e_i\} = \left\{ (z, q, y, z', w)_i \right\}, \quad (3)$$

jeweils mit

- einem Startzustand $z \in Z$,
- einer Merkmalzuordnungsfunktion $q \in Q$,
- einem Ausgabesymbol $y \in Y$,
- einem Zielzustand $z' \in Z$ und
- einem Gewicht $w \in \mathbb{K}$.

Wir benutzen die übliche graphische Darstellung für Zustandsübergänge, gegebenenfalls erweitert durch eine Skizze der Merkmalzuordnungsfunktion:



Man beachte, dass so definierte Automaten *zwei* Gewichte pro Übergang tragen, erstens das „normale“ Übergangsgewicht w und zweitens ein Zuordnungsgewicht q eines Merkmalvektors \vec{o} zum Übergang. Wir bezeichnen das erste Gewicht als „zeitinvariant“, das zweite als „zeitvariant“, da es vom aktuellen Element der zeitlichen Merkmalvektorfolge abhängt.

Die Merkmalzuordnungsfunktionen werden – wie bei HMMs üblich – aus multivariaten Normalverteilungsdichten abgeleitet, die Übergangsgewichte aus Wahrscheinlichkeiten. Es gelten stochastische Randbedingungen. Einzelheiten sind in Abschnitt 2.2 zu finden.

Hidden-MARKOV-Automaten übersetzen Merkmalvektorfolgen $\vec{\mathbf{o}} \in \mathcal{O}^*$ in Ausgabezeichenfolgen $\mathbf{y} \in Y^*$ und ordnen das Gewicht

$$\llbracket \mathcal{H} \rrbracket(\vec{\mathbf{o}}, \mathbf{y}) = \bigoplus_{U \in \mathcal{U}^K(I, \mathbf{y}, F)} \left\{ \bigotimes_{e^k \in U} \left[q(e^k) [\vec{o}^k] \otimes w(e^k) \right] \right\} \quad (5)$$

zu. Dabei stehen

- $K = |\vec{\mathbf{o}}|$ für die Länge der Merkmalvektorfolge,
- $\mathcal{U}^K(I, \mathbf{y}, F)$ für die Menge der durchgehenden Wege durch den Automatengraphen, deren Länge K und deren Ausgabezeichenfolge \mathbf{y} ist (vgl. [5]),
- e^k für den k -ten Zustandsübergang eines solchen Weges,
- \vec{o}^k für das k -te Element der Merkmalvektorfolge $\vec{\mathbf{o}}$,
- $q(e^k)$ für die Merkmalzuordnungsfunktion und $w(e^k)$ für das Gewicht, welche die Verhaltensfunktion w dem Zustandsübergang e^k zuordnet.

2.2 Automatenformen

In Abhängigkeit vom Gewichtshalbring und der damit verbundenen Wahl der Merkmalzuordnungsfunktion ergeben sich vier Formen von Hidden-MARKOV-Automaten:

- Wahrscheinlichkeitsform

$$p_{\mathcal{A}}(\vec{\mathbf{o}}, \mathbf{y}) = \sum_{U \in \mathcal{U}^K(I, \mathbf{y}, F)} \left[\prod_{e^k \in U} p(\vec{o}^k | e^k) P(e^k) \right], \quad (6)$$

- negativ-logarithmische Wahrscheinlichkeitsform

$$-\ln p_{\mathcal{A}}(\vec{\mathbf{o}}, \mathbf{y}) = \bigoplus_{\ln} \sum_{U \in \mathcal{U}^K(I, \mathbf{y}, F)} \left[\sum_{e^k \in U} -\ln p(\vec{o}^k | e^k) - \ln P(e^k) \right] \quad (7)$$

mit $a \bigoplus_{\ln} b = -\ln(e^{-a} + e^{-b})$,

- Wahrscheinlichkeitsform mit VITERBI-Approximation

$$p_{\mathcal{A}}(\vec{\mathbf{o}}, \mathbf{y}) = \text{Max}_{U \in \mathcal{U}^K(I, \mathbf{y}, F)} \left[\prod_{e^k \in U} p(\vec{o}^k | e^k) P(e^k) \right] \text{ sowie} \quad (8)$$

- negativ-logarithmische Wahrscheinlichkeitsform mit VITERBI-Approximation

$$-\ln p_{\mathcal{A}}(\vec{\mathbf{o}}, \mathbf{y}) = \text{Min}_{U \in \mathcal{U}^K(I, \mathbf{y}, F)} \left[\sum_{e^k \in U} -\ln p(\vec{o}^k | e^k) - \ln P(e^k) \right]. \quad (9)$$

Dabei steht $p(\vec{o}|e)$ für die dem Übergang e zugeordnete Verteilungsdichtefunktion im Merkmalraum und $P(e)$ für die Übergangswahrscheinlichkeit. Für letztere muss eine der beiden stochastischen Randbedingungen

$$P(e) = P(z', y|z, q) \rightsquigarrow \sum_{z'} \sum_y P(z', y|z, q) = 1 \quad (10)$$

oder

$$P'(e) = P(z', y, q|z) \rightsquigarrow \sum_{z'} \sum_y \sum_x P(z', y, q|z) = 1 \quad (11)$$

gelten, welche über die Beziehung

$$P(z', y|z, q) = \frac{P(z', y, q|z)}{\sum_{z'} \sum_y P(z', y, q|z)} \quad (12)$$

zusammenhängen.

Tabelle 1: Formen von Hidden-MARKOV-Automaten mit Gewichtshalbringen.

logarithmisch	VITERBI-Approx.	Gewichtshalbring	\mathbb{K}	\otimes	\oplus	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$q(e)[\vec{o}]$	$w(e)$
nein	nein ja	Wkts.- Max/Mal-	\mathbb{R}_+	\cdot	$+$ max	0	1	$p(\vec{o} e)$	$P(e)$
ja	nein ja	logarithm. tropischer	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	$+$	\oplus ln min	∞	0	$-\ln p(\vec{o} e)$	$-\ln P(e)$

Tabelle 1 zeigt eine Übersicht der Automatenformen, die entsprechenden Gewichtshalbringe sowie die Ableitungen der Merkmalzuordnungsfunktion aus der Verteilungsdichte und des Übergangsgewichts aus der Übergangswahrscheinlichkeit. Die negativ-logarithmischen und die Wahrscheinlichkeitsformen sind über die Beziehung

$$w = -\ln p \quad (13)$$

isomorph. Bild 1 veranschaulicht die Zusammenhänge zwischen den vier Formen.

2.3 Dynamische Programmierung

Schreibt man die dynamische Programmierung [1, 2] zur Berechnung von Gleichung (5) auf, erhält man in Abhängigkeit vom Gewichtshalbring den Vorwärts- sowie den VITERBI-Algorithmus in einer gemeinsamen Schreibweise. Algorithmus 2 stellt die allgemeine dynamische Programmierung dar. In den Halbringen mit VITERBI-Approximation (siehe Tabelle 1) realisiert sie den VITERBI-Algorithmus [9], für die anderen Halbringe den Forward-Algorithmus [7]. Außerdem ist der Rückwärtsalgorithmus mit angegeben. Die Vorwärtsvariablen sind mit g_z^k bezeichnet, die Rückwärtsvariablen mit h_z^k .¹

¹In Anlehnung an die übliche Darstellung der A*-Suche, bei denen so bezeichnete Variablen mit der gleichen Funktion auftreten.

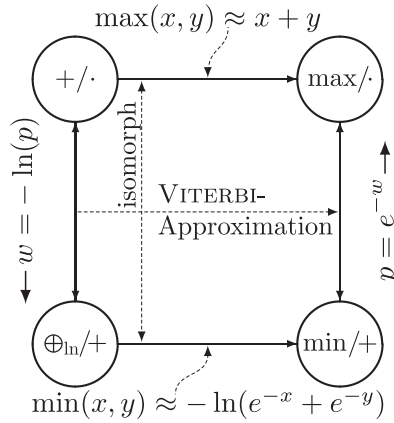


Bild 1: Zusammenhänge zwischen den HMA-Formen

Algorithmus 2: Vorwärts-Rückwärts- und VITERBI-Algorithmus

1. Initialisierung

$$a) \quad g_{z_i}^0 = \begin{cases} \bar{1} & : z_i \in I \quad (\text{Anfangszustand}) \\ \bar{0} & : z_i \notin I \quad (\text{kein Anfangszustand}) \end{cases}$$

$$b) \quad h_{z_i}^K = \begin{cases} \bar{1} & : z_i \in F \quad (\text{Schlusszustand}) \\ \bar{0} & : z_i \notin F \quad (\text{kein Schlusszustand}) \end{cases}$$

2. Rekursion

$$a) \quad g_{z_i}^k = \bigoplus_{e:z'(e)=z_i} \left[g_{z(e)}^{k-1} \otimes q(e) [\vec{\sigma}^k] \otimes w(e) \right] \quad \text{für } 1 < k \leq K$$

$$b) \quad h_{z_i}^{k-1} = \bigoplus_{e:z(e)=z_i} \left[h_{z'(e)}^k \otimes q(e) [\vec{\sigma}^k] \otimes w(e) \right] \quad \text{für } K \geq k > 1$$

3. Terminierung

$$a) \quad g(\vec{\sigma}, \mathcal{A}) = \bigoplus_{z_i} g_{z_i}^K \quad \text{mit } z_i \in F \quad (\text{Schlusszustände})$$

$$b) \quad h(\vec{\sigma}, \mathcal{A}) = \bigoplus_{z_i} h_{z_i}^0 \quad \text{mit } z_i \in I \quad (\text{Anfangszustände})$$

Die Darstellung enthält der Übersichtlichkeit halber nicht die eigentlich notwendige Sicherstellung der stochastischen Randbedingung hinsichtlich der Wege

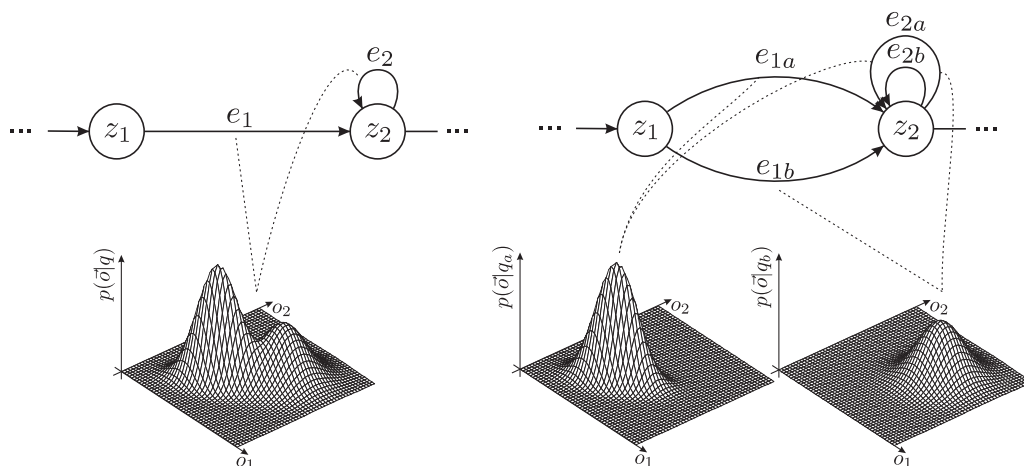
$$\bigoplus_{U \in \mathcal{U}(I, F)} \left[\bigotimes_{e \in U} w(e) \right] = \bar{1}, \quad (14)$$

die allerdings ohnehin nur für die zeitinvarianten Übergangsgewichte $w(e)$, nicht aber für die zeitvarianten Zuordnungsgewichte $q(e) [\vec{\sigma}^k]$ von Merkmalvektoren gelten würde. Soll die Randbedingungen wenigstens hinsichtlich der zeitinvarianten Gewichte eingehalten werden, müssen die Vorwärtsvariablen abweichend von Algorithmus 2 so initialisiert werden, dass

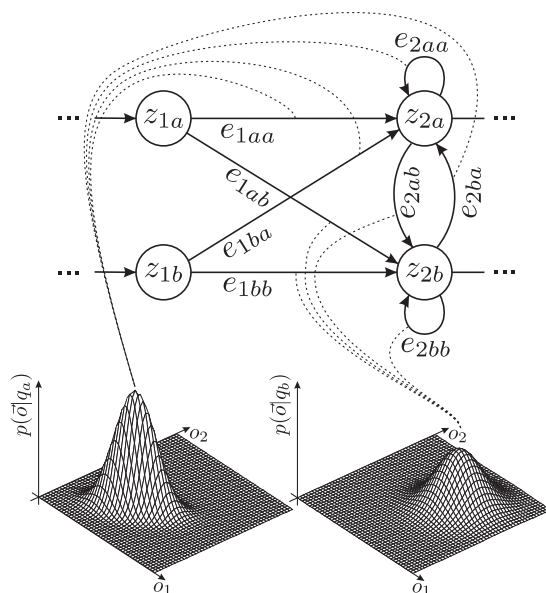
$$\bigoplus_{z_i \in I} g_{z_i}^0 = \bar{1} \quad (15)$$

gilt.

2.4 Automatentopologien



(a) Darstellung der klassischen HMM-Topologie mit HMA (16)



(c) wie (b), jedoch mit Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Verteilungsdichten

Bild 2: HMA-Topologien für GAUSSsche Mischverteilungsdichten mit zwei Elementen.

Durch die Zuordnung der Verteilungsdichtefunktionen zu den Zustandsübergängen des Automaten² besteht kein mathematischer Grund, Mischverteilungsdichten gesondert zu betrachten. Diese lassen sich nämlich trivial als parallele Zustandsübergänge schreiben

$$p(\vec{\sigma}^k|e) \cdot P(e) = \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m p(\vec{\sigma}^k, \mathcal{N}_m(e)) \right] \cdot P(e) \quad p(\vec{\sigma}^k|e_1) \cdot P(e_1) = p(\vec{\sigma}^k, \mathcal{N}_1(e)) \cdot \lambda_1 P(e)$$

$$\dots \rightarrow z \xrightarrow{e} z' \dots \hat{=} \dots \rightarrow z \begin{matrix} \xrightarrow{e_1} \\ \xrightarrow{e_2} \\ \vdots \\ \xrightarrow{e_M} \end{matrix} z' \dots, \quad (16)$$

$$p(\vec{\sigma}^k|e_M) \cdot P(e_M) = p(\vec{\sigma}^k, \mathcal{N}_M(e)) \cdot \lambda_M P(e)$$

²Diese Form ist aus der Literatur als *arc emission HMM* bekannt [4].

was man im Wahrscheinlichkeitshalbring mit Hilfe der Vorwärtsvariablen (siehe Abschnitt 2.3) leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned}
\text{links: } g_{z'}^{k+1} &= p(\vec{\sigma}^k | e) \cdot g_{z'}^{k+1} \\
&= \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m p(\vec{\sigma}^k, \mathcal{N}_m(e)) \right] \cdot P(e) \cdot g_{z'}^{k+1} \\
\text{rechts: } g_{z'}^{k+1} &= \left[\sum_{m=1}^M p(\vec{\sigma}^k, \mathcal{N}_m(e)) \cdot P(e_m) \right] \cdot g_{z'}^{k+1} \\
&= \left[\sum_{m=1}^M p(\vec{\sigma}^k, \mathcal{N}_m(e)) \cdot \lambda_m \right] \cdot P(e) \cdot g_{z'}^{k+1}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Diese Tatsache ist vor allem für die Parameterschätzung (siehe Abschnitt 3) von Bedeutung, deren Darstellung sich dadurch vereinfacht.

Die Rückführung auf die klassische Zuordnung der Verteilungsdichtefunktionen zu den Zuständen kann dadurch geschehen, dass allen Übergängen, welche zu ein und demselben Zustand führen, die gleiche Dichtefunktion zugeordnet wird. Bild 2 verdeutlicht das Prinzip.

3 EM-Parameterschätzung

Die Parameter eines HMA sind

$$G = \left\{ (P(e), \mathcal{N}(e)) \right\} = \left\{ (P(e), \vec{\mu}_e, \Sigma_e) \right\} \tag{18}$$

mit den Mittelwertvektoren $\vec{\mu}_e$, den Kovarianzmatrizen Σ_e und den Übergangswahrscheinlichkeiten $P(e)$, jeweils bezogen auf den Übergang e . Um die optimalen Parameter G^* eines HMA zu finden, formulieren wir die Zielfunktion mit Hilfe der Likelihood $L(G|O)$ der Parameter G bei gegebener klassifizierter Lernstichprobe $O = \{(\vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^K), \mathbf{y}\}$ ³ und maximieren diese:

$$G^* = \arg \max_G L(G|O) = \arg \max_G p_{\mathcal{A}}(\vec{\sigma}, \mathbf{y}|G), \tag{19}$$

wobei $p_{\mathcal{A}}(\vec{\sigma}, \mathbf{y}|G)$ entweder durch Gleichung (6) (BAUM-WELCH-Training) oder durch Gleichung (8) (VITERBI- oder *segmental-k-means*-Training [7, 3]) bestimmt wird. Da diese Gleichung nicht geschlossen lösbar ist, wird ein iteratives Schätzverfahren eingesetzt, z. B. das Erwartungswert-Maximierungsverfahren (*expectation-maximization algorithm*, EM). Bild 3 gibt einen Überblick über die Schritte des EM-Verfahrens. Die Aufgabe der initialen Segmentierung ist es, geeignete Startparameter auszuwählen (im einfachsten Fall willkürliche Werte). Direkt nach diesem Schritt und nach jeder Ausführung des in Algorithmus 2 erläuterten Vorwärts-/Rückwärts- oder VITERBI-Algorithmus erfolgt eine Neuschätzung der Parameter

$$P^*(e) = \frac{\sum_{k=1}^K \alpha_e^k}{\sum_{k=1}^K \gamma_e^k} \tag{20}$$

$$\vec{\mu}_e^* = \frac{\sum_k \alpha_e^k \vec{\sigma}^k}{\sum_k \alpha_e^k} \tag{21}$$

$$\Sigma_e^* = \frac{\sum_k \alpha_e^k (\vec{\sigma}^k - \vec{\mu}_e) (\vec{\sigma}^k - \vec{\mu}_e)^\top}{\sum_k \alpha_e^k} \tag{22}$$

³Der Einfachheit halber wird die Lernstichprobe als *eine* lange Merkmalvektorfolge angenommen. Diese Vereinfachung stellt nicht die korrekte Belegung von Anfangs- und Schlusszuständen sicher.

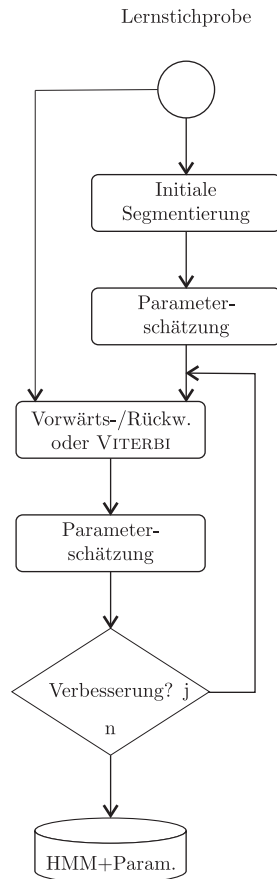


Bild 3: Übersicht zum Erwartungswert-Maximierungsverfahren (EM).

Dazu ist auch eine Neuberechnung der Hilfsvariablen α_e^k (Wahrscheinlichkeit, dass ein durchgehender Weg zum Zeitpunkt k den Übergang e benutzt) und γ_z^k (Wahrscheinlichkeit, dass ein durchgehender Weg zum Zeitpunkt k den Zustand z benutzt) notwendig:

$$\alpha_e^k = \left\| \frac{g_{z(e)}^{k-1} \cdot P(e) \cdot p(\vec{o}^k|e) \cdot h_{z'(e)}^k}{\bigoplus_e \left(g_{z(e)}^{k-1} \cdot P(e) \cdot p(\vec{o}^k|e) \cdot h_{z'(e)}^k \right)} \right\| \quad (23)$$

$$\gamma_z^k = \left\| \frac{g_z^k \cdot h_z^k}{\bigoplus_z \left(g_z^k \cdot h_z^k \right)} \right\|. \quad (24)$$

Die dafür erforderlichen Vorwärts-/Rückwärtsvariablen g und h werden mit Algorithmus 2 ermittelt. Eine Herleitung der Schätzformeln ist für GMMs in [10] und für HMMs in [8] beschrieben. Nach der Berechnung der Parameter wird geprüft, ob die Zielfunktion ausreichend verbessert werden konnte. Wenn nicht, erfolgt der Abbruch des Verfahrens.

Die Gleichungen (20) bis (24) gelten für den Wahrscheinlichkeits- und den Max/Mal-Halbring. Der Vorteil dieser allgemeinen Schreibweise ist, dass BAUM-WELCH-Algorithmus und VITERBI-Training einheitlich beschrieben werden können. Tabelle 3 erläutert die Bedeutung der allgemeinen Operatoren für die Verfahren. (20) bis (24) sind auch für die logarithmischen Halbringe aufstellbar, dann wird entsprechend logarithmisch gerechnet.

Tabelle 3: Bedeutung der allgemeinen Operatoren \oplus und $\llbracket \cdot \rrbracket$ in den Gewichtshalbring.

Algorithmus/ Training	Gewichts- halbring	\oplus	$\llbracket x \rrbracket$
BAUM-WELCH-	Wkts.-	+	x
VITERBI-	Max/Mal-	max	$\lfloor x \rfloor$

4 Zusammenfassung

Der Beitrag stellt eine mathematische Formulierung von Hidden-MARKOV-Modellen als endliche Transduktoren vor. Kapitel 2 führt den Hidden-MARKOV-Automaten und seine vier, vom Gewichtshalbring abhängigen, Automatenformen und deren Zusammenhang ein. Dadurch unterscheiden sich die Formulierungen für die dynamische Programmierung (Abschnitt 2.3) und für die Parameterschätzung in Kapitel 3 nur noch durch den entsprechenden Gewichtshalbring.

Literatur

- [1] BELLMAN, R. E.: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1957. Republished 2003: Dover, ISBN 0486428095.
- [2] BELLMAN, R. E.: *On a Routing Problem*. Quarterly of Applied Mathematics, 16(5):87–90, 1958. ISSN 0033-569X.
- [3] JUANG, H.-H. und RABINER, L. R.: *The segmental K-means algorithm for estimating parameters of Hidden Markov Models*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing, 38(9):1639–1641, 1990.
- [4] MANNING, C. D. und SCHÜTZE, H.: *Foundations of Statistical Natural Language Processing*. MIT Press, Cambridge, MA, USA; London, UK, 2001.
- [5] MOHRI, M.: *Weighted Automata Algorithms*. In: DROSTE, M., KUICH, W. und VOGLER, H. (Hrsg.): *Handbook of Weighted Automata*, Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series, S. 213–254. Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-642-01491-8.
- [6] MOHRI, M., PEREIRA, F. C. N. und RILEY, M. : *Speech recognition with weighted finite-state transducers*. In: RABINER, L. und JUANG, F. (Hrsg.): *Handbook on Speech Processing and Speech Communication*, Bd. Part E: Speech recognition. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2008.
- [7] RABINER, L. R.: *A tutorial on Hidden Markov Models and selected applications in speech recognition*. Proceedings of the IEEE, 77(2):257–286, February 1989.
- [8] TSCHÖPE, C.: *Akustische zerstörungsfreie Prüfung mit Hidden-MARKOV-Modellen*. Doktorarbeit, Technische Universität Dresden, TUDpress, 2012.
- [9] VITERBI, A. J.: *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimal decoding algorithm*. IEEE Transactions on Information Theory, IT-13:260–269, Apr. 1967.
- [10] WOLFF, M.: *Akustische Mustererkennung*. Habilitationsschrift, Technische Universität Dresden, TUDpress, 2011.